CONCOURS 1976

OPTIONS M et P'

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

DURÉE : 4 heures

E désigne l'espace vectoriel des fonctions réelles, indéfiniment dérivables sur $[a, b]$ et x_1, x_2, x_3, trois réels tels que $a \leqslant x_1 < x_2 < x_3 \leqslant b$. F est le sous-espace de E formé de la fonction nulle et des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 5. Enfin, pour tout $x \in [a, b]$, on pose :

$$W(x) = (x - x_1)\ (x - x_2)\ (x - x_3)\ .$$

I

1° Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, montrer qu'il existe une unique fonction polynomiale D_i de degré 2 telle que, pour tout $j \in \{1, 2, 3\}$, $D_i(x_j) = 0$ si $i \neq j$ et 1 si $i = j$. Expliciter D_1, D_2, D_3 sous forme de produits.

2° On pose :

$$V_i(x) = (x - x_i)\ (D_i(x))^2$$
$$U_i(x) = (D_i(x))^2 - 2D'_i(x_i)\ V_i(x)\ .$$

Calculer, pour tout $j \in \{1, 2, 3\}$, les quantités :

$$V_i(x_j) \quad ; \quad V'_i(x_j) \quad ; \quad U_i(x_j) \quad ; \quad U'_i(x_j)\ .$$

3° A tout f appartenant à E, on associe $\bar{f}$, définie par :

$$\bar{f}(x) = \sum_{i=1}^{3} (f(x_i)\ U_i(x) + f'(x_i)\ V_i(x))\ .$$

Montrer que $\bar{f}$ appartient à F et calculer $\bar{f}(x_j)$ et $\bar{f}'(x_j)$ en fonction de f.

4° Montrer que $\bar{f} = f$ si, et seulement si, f appartient à F.

II

1° Soit $t \in [a, b]$, distinct des x_i. Montrer qu'il existe un unique k_t tel que la fonction :

$$E(x) = f(x) - \bar{f}(x) - k_t(W(x))^2$$

soit nulle en x_1, x_2, x_3, t. Que pourra-t-on dire de sa dérivée?

2° En appliquant — d'une façon qu'on détaillera — le théorème de Rolle, déduire du 1° qu'il existe un $c_t \in]a, b[$ où la dérivée sixième $E^{(6)}(c_t)$ est nulle.

3° En déduire la valeur de k_t, puis exprimer $f(t)$ comme somme de $\bar{f}(t)$ et d'un terme complémentaire qu'on précisera. Que devient cette expression si t est l'un des x_i?

4° Montrer qu'il existe un $c \in [a, b]$ tel que :

$$\int_a^b f(t)\ dt = \int_a^b \bar{f}(t)\ dt + \frac{f^{(6)}(c)}{6!} \cdot \int_a^b (W(t))^2\ dt\ .$$

III

Pout tout $i \in \{1, 2, 3\}$, on pose : $u_i = \int_a^b U_i(t)\,dt$; $v_i = \int_a^b V_i(t)\,dt$.

1° Montrer que l'égalité :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{i=1}^{3} (u_i f(x_i) + v_i f'(x_i))$$

est vérifiée pour tout f appartenant à F. Quelle relation a-t-on dans le cas général?

.../...

2° Montrer que l'égalité :

$$\int_a^b f(t)\,dt = u_1 f(x_1) + u_2 f(x_2) + u_3 f(x_3)$$

est vérifiée pour tout f appartenant à F si, et seulement si,

$$v_1 = v_2 = v_3 = 0.$$

3° Montrer que cette dernière condition équivaut à : pour tout $s \in \{0, 1, 2\}$,

$$\int_a^b W(t)\, t^s\, dt = 0.$$

IV

On suppose désormais que $a = -1$, $b = 1$ et on pose :

$$p = x_1 + x_2 + x_3 \quad ; \quad q = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \quad ; \quad r = x_1x_2x_3 .$$

1° Écrire, en fonction des inconnues p, q, r, les conditions du III-3° et les résoudre.

2° En déduire $W(x)$, puis x_1, x_2, x_3.

3° Calculer u_1, u_2, u_3 et le coefficient de $f^{(6)}(c)$ dans la formule générale du III-3°.

4° Écrire, pour f appartenant à E, la forme explicite que prend alors la relation générale du III-3°. Quelles observations vous suggère-t-elle?

V

Les hypothèses sont celles de IV et on pose :

$$M = \sup_{-1 \leqslant x \leqslant 1} | f^{(6)}(x) | .$$

1° Étudier les variations de $W(x)$ et calculer la borne supérieure de $(W(x))^2$ sur $[-1, 1]$.

2° En déduire, à l'aide de M uniquement, une majoration uniforme de $| f(t) - \bar{f}(t) |$ sur $[-1, 1]$. Quelle comparaison peut-on faire avec le résultat de IV-4°?

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail